Solusi Persamaan Nirlanjar (Bagian 2)

Bahan Kuliah IF4058 Topik Khusus Informatika I

Oleh; Rinaldi Munir (IF-STEI ITB)

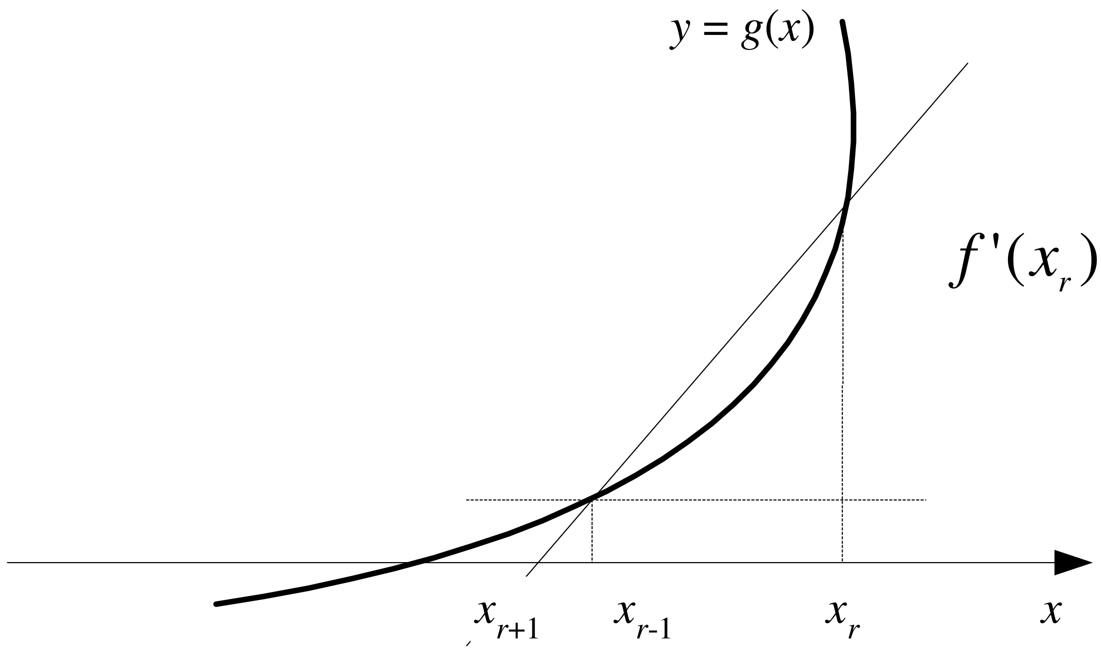
Metode Secant

- Prosedur lelaran metode Newton-Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi, $f'(x)$.

- Sayangnya, tidak semua fungsi mudah dicari turunannya, terutama fungsi yang bentuknya rumit.

- Turunan fungsi dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk lain yang ekivalen.

- Modifikasi metode Newton-Raphson ini dinamakan *metode secant*



$$f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{AC}{BC} = \frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

Sulihkan ke dalam rumus Newton-Raphson:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

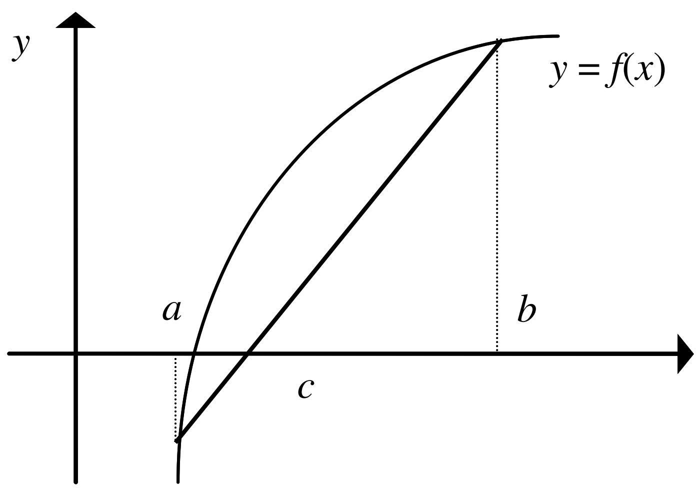
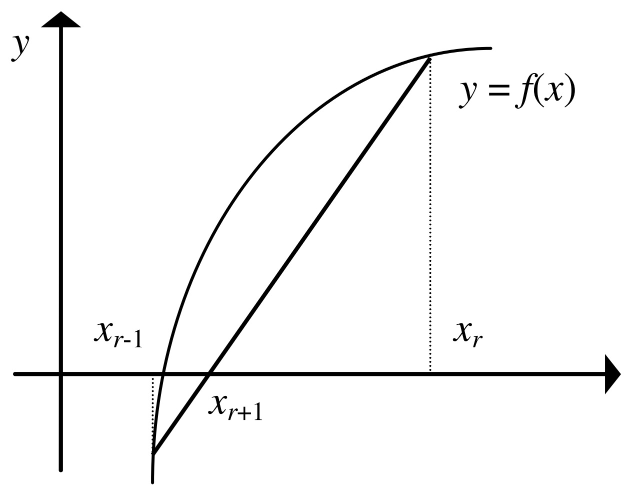
$$\boxed{x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}}$$

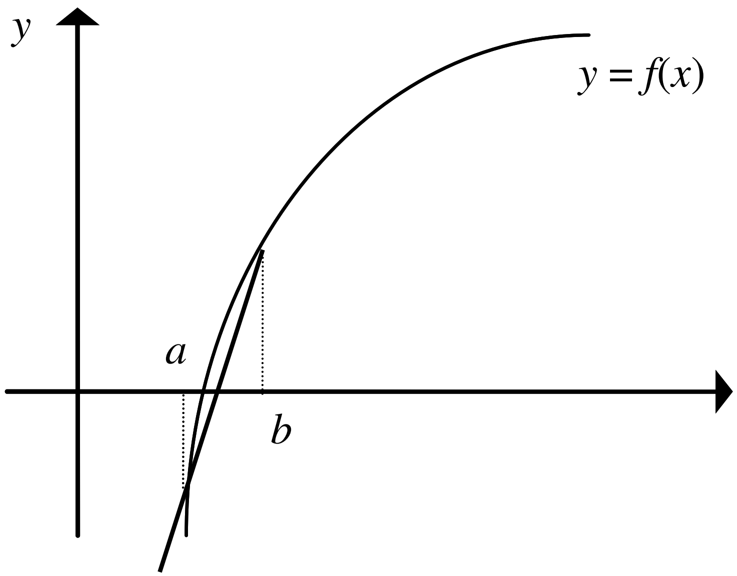
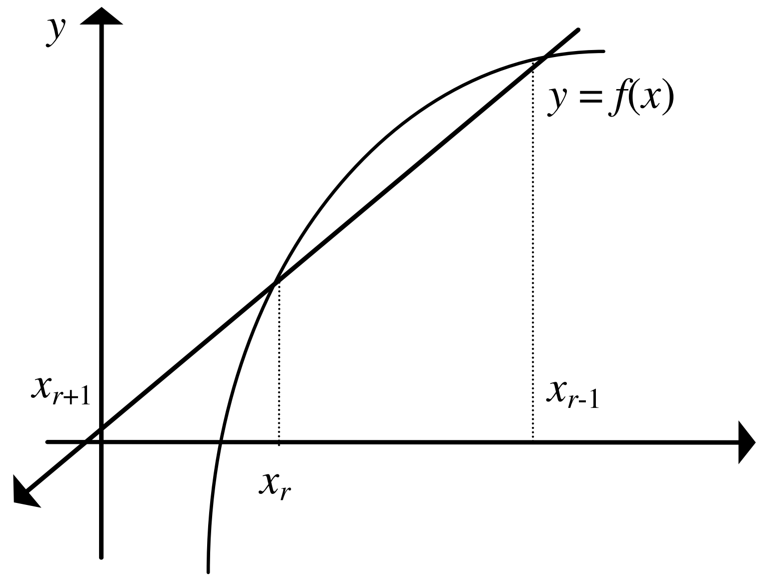
- Metode Secant memerlukan dua buah tebakan awal akar, yaitu x_0 dan x_1.

- Kondisi berhenti lelaran adalah bila

$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ (galat mutlak) atau $\left|\dfrac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}}\right| < \delta$

- Sepintas metode secant mirip dengan metode regula-falsi, namun sesungguhnya prinsip dasar keduanya berbeda, seperti yang dirangkum pada tabel di bawah ini:

Metode Regula Falsi	Metode Secant
1. Diperlukan dua buah nilai awal a dan b (ujung-ujung selang) sedemikian sehingga $f(a)\,f(b) < 0$.	1. Diperlukan dua buah nilai awal x_0 dan x_1 (tebakan awal akar), tetapi <u>tidak</u> <u>harus</u> $f(x_0)\,f(x_1) < 0$.
2. <u>Lelaran pertama</u>:  Pada lelaran pertama, tidak ada perbedaan antara regula-falsi dan secant. Perbedaan baru muncul pada lelaran kedua.	2. <u>Lelaran pertama</u>:  Pada lelaran pertama tidak ada perbedaan antara secant dan regula falsi. Perbedaan baru muncul pada lelaran kedua.

<u>Lelaran kedua</u>:  Perpotongan garis lurus dengan sumbu-x tetap berada di dalam selang yang mengandung akar.	<u>Lelaran kedua</u>:  Perpotongan garis lurus dengan sumbu-x mungkin menjauhi akar.
3. Berdasarkan nomor 2 di atas, lelarannya *selalu* konvergen	3. Berdasarkan nomor 2 di atas, lelarannya *mungkin* divergen.

```
procedure Secant(x0, x1:real);
{ Mencari akar persamaan f(x) = 0 dengan metode secant
  K.Awal : x0 dan x1 adalah tebakan awal akar, terdefenisi nilainya
  K.Akhir: akar persamaan tercetak di layar
}
const
  epsilon = 0.000001;     { toleransi galat akar hampiran }
var
    x_sebelumnya: real;

    function f(x:real):real;
    { mengembalikan nilai f(x). Definisi f(x) bergantung pada persoalan }
begin
  repeat
     x_sebelumnya:=x1;
     x:=x-(f(x1)*(x1 - x0)/(f(x1)-f(x0)));
     x0:=x1;
     x1:=x;
  until (ABS(x-x_sebelumnya) < epsilon);
  { x adalah hampiran akar persamaan }
  write('Hampiran akar x = ', x:10:6);
end;
```

Hitunglah akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode secant. Gunakan $\varepsilon = 0.00001$. Tebakan awal akar $x_0 = 0.5$ dan $x_1 = 1$.

Penyelesaian:

Tabel lelarannya:

i	x_r	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$
0	0.500000	-
1	1.000000	0.500000
3	-0.797042	1.797042
4	10.235035	11.032077
5	-0.795942	11.030977
6	-0.794846	0.001096
7	-0.472759	0.322087
8	-0.400829	0.071930
9	-0.374194	0.026635
10	-0.371501	0.002692
11	-0.371418	0.000083
12	-0.371418	0.000000

Akar $x =$ -0.371418

Sistem Persamaan Nirlanjar

- Dalam dunia nyata, umumnya persamaan matematika dapat lebih dari satu, sehingga membentuk sebuah sistem yang disebut sistem persamaan nirlanjar.

- Bentuk umum sistem persamaan nirlanjar dapat ditulis sebagai

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\ldots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- Solusi sistem ini adalah himpunan nilai x simultan, x_1, x_2 , ..., x_n, yang memenuhi seluruh persamaan.

- Sistem persamaan dapat diselesaikan secara berlelar dengan metode lelaran titik-tetap atau dengan metode Newton-Raphson.

- Masing-masing dijelaskan pada slide berikut ini

1) Metode Lelaran Titik-Tetap

- Prosedur lelarannya titik-tetap untuk sistem dengan dua persamaan nirlanjar:

$$x_{r+1} = g_1(x_r, y_r)$$
$$y_{r+1} = g_2(x_r, y_r)$$
$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

- Metode lelaran titik-tetap seperti ini dinamakan metode **lelaran Jacobi**.

- Kondisi berhenti (konvergen) adalah

$$\left| x_{r+1} - x_r \right| < \varepsilon \text{ dan } \left| y_{r+1} - y_r \right| < \varepsilon$$

- Kecepatan konvergensi lelaran titik-tetap ini dapat ditingkatkan. Nilai x_{r+1} yang baru dihitung langsung dipakai untuk menghitung y_{r+1}. Jadi,

$$x_{r+1} = g_1(x_r, y_r)$$

$$y_{r+1} = g_2(x_{r+1}, y_r)$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots$$

- Metode lelaran titik-tetap seperti ini dinamakan metode **lelaran Seidel**.
- Kondisi berhenti (konvergen) adalah

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon \text{ dan } |y_{r+1} - y_r| < \varepsilon$$

- Untuk fungsi dengan tiga persamaan nirlanjar, lelaran Seidel-nya adalah

$$x_{r+1} = g_1(x_r, y_r, z_r)$$
$$y_{r+1} = g_2(x_{r+1}, y_r, z_r)$$
$$z_{r+1} = g_3(x_{r+1}, y_{r+1}, z_r)$$

$r = 0, 1, 2, \ldots$

- Kondisi berhenti (konvergen) adalah

$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ dan $|y_{r+1} - y_r| < \varepsilon$ dan $|z_{r+1} - z_r| < \varepsilon$

- **Contoh**: Selesaikan sistem persamaan nirlanjar berikut ini,

  $f_1(x, y) = x^2 + xy - 10 = 0$

  $f_2(x, y) = y + 3xy^2 - 57 = 0$

  (Akar sejatinya adalah $x = 2$ dan $y = 3$)

  Penyelesaian:

  Prosedur lelaran titik-tetapnya adalah

  $$x_{r+1} = \frac{10 - x_r^{\ 2}}{y_r} \qquad y_{r+1} = 57 - 3x_{r+1}\, y_r^{\,2}$$

  Gunakan tebakan awal $x_0 = 1.5$ dan $y_0 = 3.5$
  dan $\varepsilon = 0.000001$

  Tabel lelarannya:

r	x	y	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$	$\lvert y_{r+1} - y_r \rvert$
0	1.500000	3.500000	-	-
1	2.214286	-24.375000	0.714286	27.875000
2	-0.209105	429.713648	2.423391	454.088648
3	0.023170	-12778.041781	0.232275	13207.755429
...				

Ternyata lelarannya divergen!

- Sekarang kita ubah persamaan prosedur lelarannya menjadi

$$x_{r+1} = \sqrt{10 - x_r y_r}$$

$$y_{r+1} = \sqrt{\frac{57 - y_r}{3x_{r+1}}}$$

Tebakan awal x_0 = 1.5 dan y_0 = 3.5 dan ε = 0.000001

Hasilnya,

r	x	y	$\lvert x_{r+1} - x_r \rvert$	$\lvert y_{r+1} - y_r \rvert$
0	1.500000	3.500000	-	-
1	2.179449	2.860506	0.679449	0.639494
2	1.940534	3.049551	0.238916	0.189045
3	2.020456	2.983405	0.079922	0.066146
4	1.993028	3.005704	0.027428	0.022300
5	2.002385	2.998054	0.009357	0.007650
6	1.999185	3.000666	0.003200	0.002611
7	2.000279	2.999773	0.001094	0.000893
8	1.999905	3.000078	0.000374	0.000305
9	2.000033	2.999973	0.000128	0.000104
10	1.999989	3.000009	0.000044	0.000036
11	2.000004	2.999997	0.000015	0.000012
12	1.999999	3.000001	0.000005	0.000004
13	2.000000	3.000000	0.000002	0.000001
14	2.000000	3.000000	0.000001	0.000000

Akar $x = 2.000000$; $y = 3.000000$

2) **Metode Newton-Raphson**

- Tinjau fungsi dengan dua peubah, u = f(x, y).
- Deret Taylor orde pertama dapat dituliskan untuk masing-masing persamaan sebagai

$$u_{r+1} = u_r + (x_{r+1} - x_r)\frac{\partial u_r}{\partial x} + (y_{r+1} - y_r)\frac{\partial u_r}{\partial y}$$

dan

$$v_{r+1} = v_r + (x_{r+1} - x_r)\frac{\partial v_r}{\partial x} + (y_{r+1} - y_r)\frac{\partial v_r}{\partial y}$$

- Karena persoalan mencari akar, maka $u_{r+1} = 0$ dan $v_{r+1} = 0$, untuk memberikan

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} x_{r+1} + \frac{\partial u_r}{\partial y} y_{r+1} = - u_r + x_r \frac{\partial u_r}{\partial x} + y_r \frac{\partial u_r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} x_{r+1} + \frac{\partial v_r}{\partial y} y_{r+1} = - v_r + x_r \frac{\partial v_r}{\partial x} + y_r \frac{\partial v_r}{\partial y}$$

- Dengan sedikit manipulasi aljabar, kedua persamaan terakhir ini dapat dipecahkan menjadi:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{u_r \dfrac{\partial v_r}{\partial y} + v_r \dfrac{\partial u_r}{\partial y}}{\dfrac{\partial u_r}{\partial x}\dfrac{\partial v_r}{\partial y} - \dfrac{\partial u_r}{\partial y}\dfrac{\partial v_r}{\partial x}}$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{u_r \dfrac{\partial v_r}{\partial x} - v_r \dfrac{\partial u_r}{\partial x}}{\dfrac{\partial u_r}{\partial x}\dfrac{\partial v_r}{\partial y} - \dfrac{\partial u_r}{\partial y}\dfrac{\partial v_r}{\partial x}}$$

Penyebut dari masing-masing persamaan ini diacu sebagai **determinan Jacobi** dari sistem tersebut

- **Contoh**: Gunakan metode Newton-Raphson untuk mencari akar

$$f_1(x, y) = u = x^2 + xy - 10 = 0$$

$$f_2(x, y) = v = y + 3xy^2 - 57 = 0$$

dengan tebakan awal x_0=1.5 dan y_0=3.5

Penyelesaian:

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} = 2x + y = 2(1.5) + 3.5 = 6.5$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} = x = 1.5$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial x} = 3y^2 = 3(3.5)^2 = 36.75$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial y} = 1 + 6xy = 1 + 6(1.5) = 32.5$$

Determinan Jacobi untuk lelaran pertama adalah

6.5(32.5) - 1.5(36.75) = 156.125

Nilai-nilai fungsi dapat dihitung dari tebakan awal sebagai

$u_0 = (1.5)^2 + 1.5(3.5) - 10 = -2.5$

$v_0 = (3.5)^2 + 3(1.5)(3.5)^2 - 57 = 1.625$

Nilai *x* dan *y* pada lelaran pertama adalah

$$x_1 = 1.5 - \frac{(-2.5)(32.5) - 1.625(1.5)}{156.125} = 2.03603$$

dan

$$y_1 = 3.5 + \frac{(-2.5)(36.75) - 1.625(6.5)}{156.125} = 2.84388$$

Apabila lelarannya diteruskan, ia konvergen ke akar sejati x = 2 dan y = 3.

Contoh Penerapan

Dalam suatu proses Teknik Kimia, campuran karbon monoksida dan oksigen mencapai kesetimbangan pada suhu 300° K dan tekanan 5 atm. Reaksi teoritisnya adalah

$CO + 1/2\ O_2 \leftrightarrow CO_2$

Reaksi kimia yang sebenarnya terjadi dapat ditulis sebagai

$CO + O_2 \rightarrow x\ CO_2 + O_2 + (1 - x)\ CO_2$

Persamaan kesetimbangan kimia untuk menentukan fraksi mol CO yang tersisa, yaitu *x*, ditulis sebagai

$$K_p = \frac{(1-x)(3+x)^{1/2}}{x(x+1)^{1/2}\, p^{1/2}} \quad , 0 < x < 1$$

yang dalam hal ini, K_p = 3.06 adalah tetapan kesetimbangan untuk reaksi $CO + 1/2\ O_2$ pada 3000° K dan P = 5 atm. Tentukan nilai *x* dengan metode regula falsi yang diperbaiki.

Penyelesaian: Persoalan ini memang lebih tepat diselesaikan dengan metode tertutup karena *x* adalah fraksi mol yang nilainya terletak antara 0 dan 1.

Fungsi yang akan dicari akarnya dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \frac{(1-x)(3+x)^{1/2}}{x(x+1)^{1/2}\, p^{1/2}} - K_p \qquad , 0 < x < 1$$

dengan K_p = 3.06 dan P =5 atm.

Selang yang mengandung akar adalah [0.1, 0.9]. Nilai fungsi di ujung-ujung selang adalah $f(0.1) = 3.696815$ dan $f(0.9) = -2.988809$

yang memenuhi $f(0.1)\, f(0.9) < 0$.

Tabel lelarannya adalah:

r	*a*	*c*	*b*	*f*(*a*)	*f*(*c*)	*f*(*b*)	Selang baru	Lebarnya
0	0.100000	0.542360	0.900000	3.696815	-2.488120	-2.988809	[a, c]	0.442360
1	0.100000	0.288552	0.542360	1.848407	-1.298490	-2.488120	[a, c]	0.188552
2	0.100000	0.178401	0.288552	0.924204	0.322490	-1.298490	[c, b]	0.110151
3	0.178401	0.200315	0.288552	0.322490	-0.144794	-1.298490	[a, c]	0.021914
4	0.178401	0.193525	0.200315	0.322490	-0.011477	-0.144794	[a, c]	0.015124
5	0.178401	0.192520	0.193525	0.161242	0.009064	-0.011477	[c, b]	0.001005
6	0.192520	0.192963	0.193525	0.009064	-0.000027	-0.011477	[a, c]	0.000443
7	0.192520	0.192962	0.192963	0.009064	-0.000000	-0.000027	[a, c]	0.000442

Hampiran akar $x = 0.192962$

Jadi, setelah reaksi berlangsung, fraksi mol CO yang tersisa adalah 0.192962.